Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

А. А. Янцевич
О. В. Дьячкова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Частина I

Теорія ймовірностей

Навчальний посібник

Янцевич А. А., Дьячкова О. В.
Теорія ймовірностей

УДК 519.2 (075.8)
Я 99

Рецензенти:

В. О. Золотарьов – доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник ФТІНТ імені Б. І. Вєркіна НАН України;

О. О. Аршава – канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри вищої математики ХНУБА;

Є. В. Свищова – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних технологій і математики ХГУ «НУА».

Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 10 від 29.10.2018 року)

Янцевич А. А.

Я 99 Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник : у 2-х ч. Ч. 1. Теорія ймовірностей / А. А. Янцевич, О. В. Дьячкова. — Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. — 212 с.

ISBN 978-966-285-505-0

Видання призначено для студентів соціально-економічних і управлінських спеціальностей (усіх форм навічання), які вивчають базовий курс теорії ймовірностей і математичної статистики. Перша частина містить основні ймовірнісні поняття, теореми і методи. Зокрема висвітлено алгебру подій, аксіоматичну побудову теорії ймовірностей, операції з ними, випадкові величини та їхні розподіли, граничні теореми.

Викладення супроводжується прикладами з розв’язаннями, питаннями для самоконтролю, насичено багатим ілюстративним рядом – графіками, схемами, діаграмами. Відмінною рисою посібника є наявність широкого довідкового апарату: основних формул, числових таблиць, переліку комп’ютерних функцій, предметного покажчика, перекладного словника з теорії ймовірностей тощо. Це дозволяє використовувати посібник і як довідник студентам, аспірантам, викладачам, науковим співробітникам й усім бажаючим, які опановують імовірнісні та статистичні методи.

УДК 519.2 (075.8)

ISBN 978-966-285-505-0

КОРОТКИЙ ЗМІСТ

ЗМІСТ

Розділ III. Граничні теореми

Вступ

Усі явища, результати експериментів, дослідів, спостережень тощо можна розподілити на дві групи: *детерміновані*, які завжди відбуваються при дотриманні відповідних умов, і *недетерміновані* (випадкові), які при дотриманні відповідних умов можуть статися, а можуть і не статися. Наприклад, при киданні монети (яка не може впасти на ребро) детермінована подія: «монета впаде якою-небудь стороною догори», а випадкові (недетерміновані): «монета впаде цифрою догори», «монета впаде гербом догори».

Може скластися враження, що в подібних задачах (коли результат неоднозначний) нічого визначеного сказати не можна, але, з іншого боку, при великому числі кидань монети приблизно в половині випадків випаде цифра, а в половині випадків – герб. А це вже певна закономірність.

Таким чином, в недетермінованому випадку приходимо до нової (у порівнянні з детермінованим випадком) постановки задачі. Нас цікавить не стільки результат окремого випробування, а те, що вийде унаслідок багаторазового повторення цього випробування. Саме закономірності масових випадкових подій вивчає теорія ймовірностей.

У книзі Моріса Глемана і Томаша Варги «Імовірність в іграх і розвагах» є дуже глибоке зауваження: «Стикаючись із випадковою ситуацією, маленькі діти думають, що можна передбачити її результат; стаючи трохи старше, вони відповідають, що нічого не можна стверджувати; але мало-помалу вони відкривають, що за уявним хаосом світу випадковості можна виявити закони, які дозволяють непогано орієнтуватися у реальному світі».

Імовірнісні задачі виникають і при постановці експериментів у плануванні – наприклад: скільки потрібно провести випробувань, щоб висновки з них були досить надійні; при цьому необхідно враховувати, що експерименти можуть бути дорогими. Теорія ймовірностей дає відповідні рекомендації про мінімальну кількість експериментів, що дозволяють робити достовірні висновки.

Однією з найважливіших областей застосування теорії ймовірностей є економіка. Неможливо представити дослідження і прогнозування економічних процесів без використання регресійного аналізу, економетричного моделювання, теорії випадкових процесів тощо.

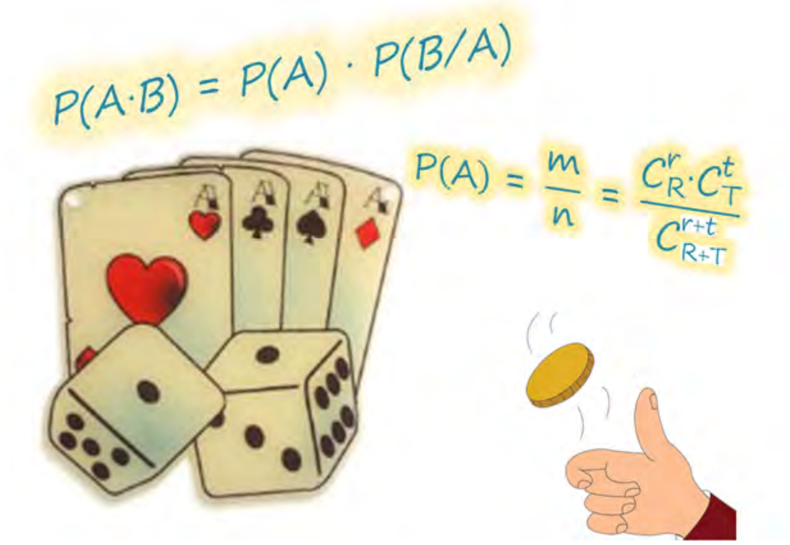
Пропонований навчальний посібник призначений для ознайомлення з теорією ймовірностей в першу чергу студентів, що спеціалізуються в області економіки, менеджменту, інших соціальних та управлінських напрямів підготовки. Ця специфіка відбита в задачах і зауваженнях соціально-економічного і управлінського характеру. Проте посібник можна також використовувати в навчанні основам теорії ймовірностей і математичної статистики студентам і аспірантам й інших спеціальностей, а також усім бажаючим опанувати ймовірнісні та статистичні методи.

Тонші питання теорії ймовірностей, а також випадкові процеси передбачається розглянути у наступних виданнях.

Автори висловлюють глибоку вдячність Євгенії Віталіївні Свищовій, доцентові кафедри інформаційних технологій і математики ХГУ «НУА», за ретельний і професійний аналіз рукопису і зроблені зауваження.

Розділ I

Імовірність



У цьому розділі:

Глава 1. Випадкові події

Глава 2. Імовірність події

Глава 3. Додавання і множення ймовірностей

Глава 4. Повторні випробування

Основні питання:

- ♣ випадкові події та їх різновиди
- ♣ операції над подіями та алгебра подій
- ♣ відносна частота
- ♣ класичне, статистичне і аксіоматичне визначення ймовірності
- ♣ властивості ймовірності
- ♣ додавання і множення ймовірностей
- ♣ умовна і повна ймовірність
- ♣ імовірності в повторних випробуваннях

При вивченні низки явищ, проведенні багатьох експериментів заздалегідь не можна передбачити наслідки явища або результати вимірювань.

Наприклад, не можна заздалегідь гарантовано стверджувати, чи буде при хмарності сьогодні дощ або ні; впаде або підніметься завтра ціна деяких акцій; із ким із можливих претендентів буде укладено контракт; чи випаде виграш або програш в азартних іграх; чи відбудуться різного роду аварії; чи будуть куплені в наступний період певні товари, виплачені дивіденди, зроблено в строк постачання устаткування і так далі.

Як правило, ці варіації результатів залежать від деяких другорядних чинників, а основні умови зберігаються незмінними.

Такі випадкові відхилення притаманні багатьом закономірним явищам. Часто ними можна нехтувати при вивченні явищ і розв'язуванні задач – виділяючи і досліджуючи основні, головні чинники. Проте у багатьох випадках численні випадкові відхилення, спотворення грають суттєву роль і вимагають спеціальних методів їх вивчення.

Явища, наслідок яких заздалегідь не можна передбачити точно, називають **випадковими**.

На відміну від випадкових явищ, невипадкові (**детерміновані**) явища можна передбачити точно.

Теорія ймовірностей – розділ математики, що вивчає спільні закономірності, властиві масовим випадковим явищам.

Можливі такі випадкові явища, що не можуть бути багаторазово повторені за тих же умов (наприклад, такі як аварії на атомних станціях у Чорнобилі або Фукусімі тощо). Імовірнісні методи дозволяють аналізувати випадкові явища, що виникають унаслідок експериментів, дослідів, вимірювань, які можна відтворювати необмежену кількість разів в однакових умовах. Перед теорією ймовірностей постає завдання досліджувати саме сукупність таких випадкових явищ (а не окремі явища) і виявити властиві їм стійкі закономірності.

Глава 1

Випадкові події

Основні питання:

- ♣ *випробування і події*
- ♣ *різновиди випадкових подій*
- ♣ *операції над подіями*
- ♣ *алгебра подій*

Випробування (дослід, експеримент) – здійснення деякого комплексу умов, при якому може відбутися явище (випадкове або детерміноване), що вивчається.

Усякий наслідок (результат) випробування називають **подією**.

Приклад 1.1. Приклади випробувань і деяких подій, пов'язаних з ними:

Випробування: кидання монети. Події: випадання герба або решки.

Випробування: кидок грального кубика. Події: випадання «шістки», парного числа очок, числа очок менше трьох.

Випробування: стрільба по мішені. Події: влучення в мішень, промах.

Випробування: перевірка лотерейного білета. Події: виграш автомобіля, програш, виграш 150 грн.

Випробування: народження дитини. Події: народження дівчинки, хлопчика, двійнят.

Випробування: зважування продукції, що випускається. Події: вага 104 г, 102,5 г.

Випробування: перевірка на брак деталей. Події: норма або брак деталі.

Випробування: надходження телефонних дзвінків на базову станцію впродовж періоду часу. Події: поступило 12 дзвінків, 7 дзвінків, жодного дзвінка.

Випробування: проходження відбору, кастингу, співбесіди для прийому на роботу. Події: успіх (наприклад, прийом на роботу), неуспіх.

Випробування: визначення пасажиропотоку в метро у годину пік, кількості проданих товарів, числа обслужених менеджером клієнтів, кількості переглядів реклами, числа відвідувачів сайту тощо. Події: різні числові значення вимірюваних величин (наприклад, 1257 пасажирів, 1185 пасажирів метро).

1.1. Різновиди подій

Достовірна (*вірогідна*) **подія** – та, яка обов'язково відбудеться при певній сукупності умов. Достовірною подією, наприклад, є сукупність усіх випробувань, яку позначають[1,2] Ω.

Неможлива подія – та, яка завідомо не відбудеться при будь-якій сукупності умов. Неможливу подію позначають $\varnothing$.

Випадкова подія – та, яка при здійсненні сукупності умов може або відбутися, або не відбутися, причому до проведення випробування невідомо, чи відбудеться вона чи ні. Випадкові події позначають прописними літерами латинського алфавіту A, B, C...

Надалі при розгляді випадкових подій ми опускатимемо слово «випадкова».

Події називають **рівноможливими**, якщо немає об'єктивних причин вважати одну подію більш можливою, ніж іншу.

<u>Приклад 1.2</u>. Гральну кістку підкидають один раз. Розглядують такі події:
A – число очок кратне 3;
B – число очок парне;
C – число очок непарне;
D – число очок менше 7;
E – число очок більше ніж 4, але менше 5;
F – випало 2 очка;
G – випало 5 очок.
Які з цих подій є випадковими, достовірними, неможливими, рівноможливими?
<u>Розв'язання</u>.
Події A, B, C, F і G унаслідок випробування можуть відбутися або не відбутися. Отже, A, B, C, F і G – випадкові події. Подія D унаслідок випробування завжди відбувається; отже, D – достовірна подія. Подія E не може відбутися; отже, E – неможлива подія. Події F і G, а також події B і C – рівноможливі події.

---

[1] Див. усі позначення та скорочення у *додатку 1*.
[2] Див. грецький алфавіт у *додатку 2*.

У випадку, коли наслідків скінченна або злічення множина, усі рівноможливі наслідки випробування, взаємовиключні один до іншого, називають **елементарними подіями**. Позначають елементарні події ω_1, ω_2...

Сукупність усіх елементарних подій називають **простором**[1] (або **множиною**) **елементарних подій**. Позначають його Ω. Для запису сукупності використовують фігурні дужки: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Подія – це будь-яка сукупність елементарних наслідків. Іншими словами, подія є підмножиною множини Ω.

Простір Ω також є подією (а саме – достовірною подією).

Приклад 1.3. Гральну кістку підкидають один раз. Розглядують такі події: A – число очок кратне 3; B – число очок парне. Побудувати простір елементарних подій. Записати множини подій A, B.

Розв'язання.

Підкидання грального кубика має 6 взаємовиключних неподільних наслідків (елементарних подій). Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (цифрами позначено результати на гранях кубика).

$A = \{3, 6\}$; $B = \{2, 4, 6\}$.

Приклад 1.4. Два гросмейстери Антон і Віктор грають підряд дві шахові партії. Кожна може завершитися виграшем одного з них або нічиєю. Побудувати простір Ω елементарних наслідків змагання.

Розв'язання.

Позначимо через A виграш у партії Антона; через B – Віктора; через $н$ – нічию.

Можливі наслідки гри:

1) Обидві партії виграв перший гравець (Антон). Позначимо цей наслідок AA.
2) Обидві партії виграв другий гравець (Віктор): BB.
3) Обидві партії закінчилися внічию: $нн$.
4) У 1-й партії виграв Антон, у 2-й – Віктор: AB.
5) У 1-й партії перемога Віктора, у 2-й – Антона: BA.
6) У 1-й виграв Антон, у 2-й – нічия: $Aн$.
7) У 1-й – перемога Віктора, у 2-й – нічия: $Bн$.
8) У 1-й – нічия, у 2-й – перемога Антона: $нA$.
9) У 1-й – нічия, у 2-й – перемога Віктора: $нB$.

Таким чином: $\Omega = \{AA, BB, нн, AB, BA, Aн, Bн, нA, нB\}$.

---

[1] У розширеному курсі з теорії ймовірностей при абстрактному підході ймовірнісний простір Ω є довільною множиною елементів ω, які називають елементарними подіями.

Приклад 1.5. Кидають дві монети (чи, що те ж саме, одну монету підкидають двічі). Побудувати простір елементарних подій.

Розв'язання.

Простір елементарних подій містить чотири елементарні наслідки: $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ (літерами $Г$ і $Р$ позначені випадання герба і решки).

Д'Аламбер запропонував розглядати ймовірнісний простір, що складається з трьох елементарних подій: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, де ω_1 – $ГГ$, ω_2 – $РР$, ω_3 – випадання монет різними сторонами. Для встановлення, якому з цих імовірнісних просторів слід надати перевагу, потрібні додаткові дослідження (цей матеріал буде вивчено пізніше).

Приклад 1.6. Кидають два гральні кубики. Побудувати простір елементарних подій. Які елементарні події включає подія A: сума очок, що випали на кубиках, менше 4?

Розв'язання.

Якщо позначити через (i, j) випадіння на двох кубиках i та j очок, то простір елементарних подій можна подати у вигляді матриці:

$\Omega = \|(i, j)\| \quad (i, j = \overline{1, 6})$.

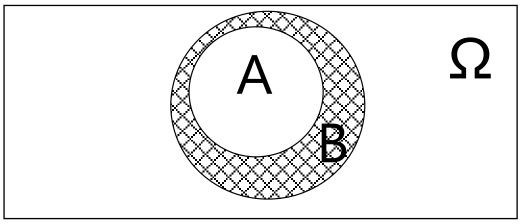
Подія A можлива лише при елементарних наслідках $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$.

1.2. Алгебра подій

Оскільки події можна подати як сукупність елементарних подій, то їх можна ілюструвати як множини. Умовимося для наочності зображувати множину всіляких подій Ω у вигляді прямокутника, а її підмножини (події) – колами в цьому прямокутнику[1].

Кажуть, що подія A **приводить до** події B, якщо з настання події A випливає настання події B. Позначають: $A \subset B$.

При цьому множина елементарних подій A міститься у множині елементарних подій B (тобто A є підмножиною B).



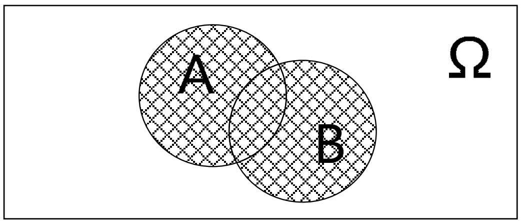
$A \subset B$

Вираз $A \subseteq B$ означає, що поява A приводить до появи події B, але не навпаки.

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то говоритимемо, що події A і B **рівносильні**, або **еквівалентні**, і писатимемо $A = B$.

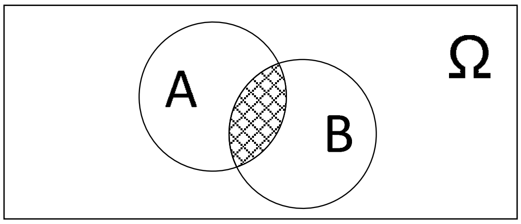
[1] Такі діаграми називають діаграмами Венна (Venn diagrams).

Сумою подій A і B називають подію C, що полягає в появі або події A, або події B, або обох цих подій. Позначають: $A + B$ або, іноді, $A \cup B$.



$C = A + B$

Добутком подій A і B називають подію C, що полягає в сумісній появі цих подій. Позначають: $A \cdot B$ або, іноді, $A \cap B$.



$C = A \cdot B$

Надалі використовуватимемо позначення $A + B$ і $A \cdot B$.

Аналогічно визначають суму і добуток будь-якого скінченного числа подій. Позначають суму і добуток скінченного числа подій A_k відповідно

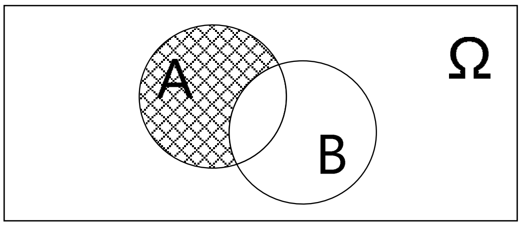
$$\sum_{k=1}^{n} A_k \quad \text{і} \quad \prod_{k=1}^{n} A_k .$$

Ці операції не зовсім відповідають нашим уявленням про арифметичні операції додавання та множення. Наприклад, для суми і добутку подій виконується:

$A + A = A$ $\quad A + \Omega = \Omega$ $\quad A + \varnothing = A$

$A \cdot A = A$ $\quad A \cdot \Omega = A$ $\quad A \cdot \varnothing = \varnothing$

Різницею подій A і B назвемо подію C, яка відбувається тоді і лише тоді, коли відбувається A і не відбувається B. Позначають: $A \setminus B$.



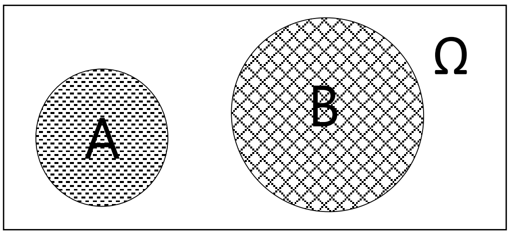
$C = A \setminus B$

Події, отримані внаслідок застосування або зліченного числа операцій додавання, множення або різниці подій, називають **складними**.

Приклад 1.7. Гральну кістку підкидають один раз. Розглядають такі події:
A – число очок кратне 3;
B – число очок парне;
C – число очок непарне.
З'ясувати зміст таких подій: $A + B$, $A \cdot C$, $C \setminus A$.

Розв'язання.
Подія $A + B$ полягає в появі хоча б однієї з подій A або B, тобто число очок або кратне 3, або парне. Отже, подія $A + B$ – число очок 2, 3, 4 або 6.
Подія $A \cdot C$ полягає в одночасній появі подій A і C, тобто число очок кратне 3 і в той же час непарне. Отже, подія $A \cdot C$ – число очок дорівнює 3.
Подія $C \setminus A$ полягає в появі непарного числа очок, не кратних 3. Отже, подія $C \setminus A$ – число очок, що дорівнює 1 або 5.

Дві події A і B називають **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні, тобто $A \cdot B = \varnothing$. Інакше події **сумісні**.



$A \cdot B = \varnothing$

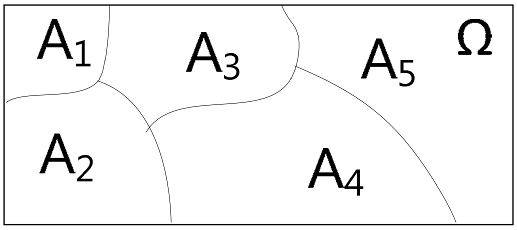
Отже, добуток несумісних подій є подія неможлива.

Події $A_1, A_2, \ldots A_n$ називають **попарно несумісними**, якщо будь-які дві з них несумісні: $A_k \cdot A_j = \varnothing$ при $k \neq j$.

Події $A_1, A_2, \ldots A_n$ утворюють **повну групу**, якщо їхня сума – достовірна подія і вони попарно несумісні:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega,$$

$$A_i \cdot A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$



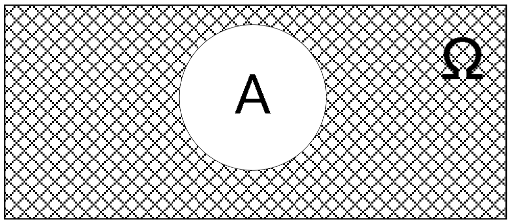
$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5 = \Omega$

Таким чином, **повна група подій** – це система випадкових подій така, що внаслідок випробування неодмінно станеться одна і тільки одна з них.

Приклад 1.8. Приклади повних груп подій:
а) Стрілець стріляє по мішені. Повна група подій: «влучення в мішень», «промах».
б) Аналізуються прибутки і витрати бюджету за рік. Повна група подій: «прибутки перевищують витрати», «витрати перевищують прибутки», «прибутки дорівнюють витратам».
в) Студент обирає, яким транспортом дістатися занять, кидаючи гральний кубик: якщо випаде «шістка» – поїде у таксі, випаде непарне число – автобусом, в інших випадках – у метро. Повна група подій: «випало 6 очок», «випало 1, або 3, або 5 очок», «випало 2 або 4 очки» – тому що ці події несумісні, а їхня сума – достовірна подія.

Дві події називають **протилежними**, якщо вони несумісні і внаслідок випробування одна з них обов'язково відбудеться.

Подію, протилежну до події A, позначають $\overline{A}$.



$\overline{A}$

$A \cdot \overline{A} = \varnothing$; $A + \overline{A} = \Omega$.

Подія $\overline{A}$ полягає в непояві події A (тобто відбувається тоді і лише тоді, коли не відбувається A).

<u>*Приклад 1.9*</u>. Для умови прикладу 1.7 з'ясувати, які з пар подій є сумісними, несумісними, протилежними.

<u>*Розв'язання.*</u>

Поява події A не виключає появи події B (якщо випало 6 очок), отже, A і B – *сумісні* події. За аналогією, поява події A не виключає події C (якщо випали 3 очки), отже, A і C – також *сумісні* події.

Поява події B виключає появу події C, отже, B і C – *несумісні* події.

Крім того, при будь-якому результаті число очок буде лише або парним, або непарним (тобто сума цих подій достовірна), отже, B і C – *протилежні* події.

Алгеброю подій U називають таку сукупність подій, що для будь-яких двох із них їхня сума, різниця і добуток також входять до U, тобто:

якщо $A, B \in U$, то виконується:

$A + B \in U$, $A \setminus B \in U$, $A \cdot B \in U$.

<u>*Приклад 1.10*</u>. Перевірити, чи є алгебрами подій сукупності:

1) $\{\varnothing, \Omega\}$;

2) $\{Г, Р, \varnothing, \Omega\}$

у разі кидання монети.

<u>*Розв'язання.*</u>

Перевіримо, що результати суми, різниці і добутку цих подій також належать указаній сукупності:

1) $\varnothing+\Omega=\Omega$, $\varnothing\setminus\Omega=\varnothing$, $\Omega\setminus\varnothing=\Omega$, $\varnothing\cdot\Omega=\varnothing$.

2) $Г+Р=\Omega$, $Г+\varnothing=Г$, $Г+\Omega=\Omega$, $Р+\varnothing=Р$, $Р+\Omega=\Omega$, $\varnothing+\Omega=\Omega$,
$Г\setminus Р=Г$, $Р\setminus Г=Р$, $Г\setminus\varnothing=Г$, $\varnothing\setminus Г=\varnothing$, $Г\setminus\Omega=\varnothing$, $\Omega\setminus Г=\Omega$, $Р\setminus\varnothing=Р$,
$\varnothing\setminus Р=\varnothing$, $Р\setminus\Omega=\varnothing$, $\Omega\setminus Р=\Omega$, $\varnothing\setminus\Omega=\varnothing$, $\Omega\setminus\varnothing=\Omega$,
$Г\cdot Р=\varnothing$, $Г\cdot\varnothing=\varnothing$, $Г\cdot\Omega=Г$, $Р\cdot\varnothing=\varnothing$, $Р\cdot\Omega=Р$, $\varnothing\cdot\Omega=\varnothing$.

Таким чином, обидві сукупності є алгебрами подій, оскільки усі отримані результати належать початковим сукупностям.

Операції додавання і добутку подій мають низку властивостей, серед яких:

$A + B = B + A$

$A \cdot B = B \cdot A$

$A \cdot B \subset A$

$A \setminus B = A \cdot \overline{B}$

$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$A + \overline{A} = \Omega$

$A \cdot \overline{A} = \varnothing$

$A + A = A$

$A \cdot A = A$

$A + \varnothing = A$

$A \cdot \varnothing = \varnothing$

$A + \Omega = \Omega$

$A \cdot \Omega = A$

Перевірте, чи засвоїли ви такі
ключові поняття:

- ♣ випадкові явища
- ♣ випробування
- ♣ події
  - – випадкові
  - – достовірні
  - – неможливі
  - – рівноможливі
  - – сумісні
  - – несумісні
  - – попарно несумісні
- ♣ події
  - – протилежні
  - – складні
  - – елементарні
- ♣ сума подій
- ♣ добуток подій
- ♣ різниця подій
- ♣ повна група подій
- ♣ безліч елементарних подій
- ♣ алгебра подій

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади достовірних, неможливих, випадкових подій.
2. Наведіть приклади складних та елементарних подій.
3. Чи є несумісні події протилежними?
4. Чи є протилежні події несумісними?
5. Випробування полягає в підкиданні одного грального кубика та однієї монети. Що є елементарною подією? Скільки елементів містить простір елементарних подій?
6. Що означають події $A \cdot A$ і $A + A$?
7. Чи сумісні події $\overline{A+B}$ і A? *Відповідь:* ні.
8. Нехай A, B, C – деякі події, причому $A \subseteq B$. Спростіть вирази: а) $A \cdot B$; б) $A + B$; в) $A \cdot B \cdot C$; г) $A + B + C$. *Відповідь:* A; B; $A \cdot C$; $B + C$.

Глава 2

Імовірність події

Основні питання:

- *статистична ймовірність і відносна частота*
- *класична ймовірність*
- *геометрична ймовірність*
- *аксіоматична ймовірність*
- *властивості ймовірності*
- *аксіоматика Колмогорова*

Імовірність події відбиває міру об'єктивної можливості та впевненості у появі події. Часто цю можливість можна виразити у вигляді дійсного числа. Таким чином, вона є числовою характеристикою події. Існує декілька підходів до визначення поняття ймовірності.

2.1. Статистична ймовірність

Виходять з того, що при досить великому числі випробувань частота настання події повинна прямувати до об'єктивної міри можливості цієї події, проте математично строго формалізувати це міркування досі не вдалося.

Нехай проводять n однакових незалежних один від одного дослідів, і нехай в m з них подія A відбулася.

Відносною частотою події A у проведеній серії експериментів назвемо відношення

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P^{*}(A) \qquad [2.1]$$

Якщо при збільшенні числа дослідів відносна частота події коливається біля деякого фіксованого значення, то говорять, що подія A стійка, а це значення називають **статистичною ймовірністю** події A. Позначають $P^*(A)$.

Це визначення вказує на спосіб оцінки невідомої ймовірності (шляхом великої кількості незалежних дослідів в однакових умовах).

Приклад 2.1. Наприклад, упродовж серпня у Харкові зафіксовано такі показники народжуваності:

дата:	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8	7.8	8.8	9.8	10.8	11.8	12.8	13.8	14.8
дівчатка	20	30	22	27	35	19	16	22	16	21	34	31	19	19
хлопчики	22	23	26	26	27	17	16	23	31	39	31	26	19	16

дата:	15.8	16.8	17.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8	24.8	25.8	26.8	27.8	28.8	29.8	30.8	31.8
дівчатка	35	15	34	28	17	16	20	29	30	20	27	26	21	18	31	24	21
хлопчики	28	32	25	26	26	20	15	33	33	20	31	37	16	22	34	26	31

Відносна частота народження хлопчиків стійка і близька до ½, а точніше — коливається біля числа 0,517. Багаторічні статистичні дані багатьох країн дають приблизно те ж значення (0,514) відносної частоти. Його можна прийняти за наближене значення ймовірності народження хлопчиків.

Статистичну ймовірність ще називають *частотною*, або *емпіричною* ймовірністю.

Проте при статистичному підході виникає декілька складнощів у застосуванні формули (2.1):

1) імовірність можна визначити лише після проведення великої кількості випробувань – однорідних і незалежних;
2) потрібно забезпечити незалежність випробувань;
3) події повинні мати статистичну стійкість. Результат випробувань неоднозначний;
4) не можна проводити нескінченну послідовність дослідів.

2.2. Класичне визначення ймовірності

При класичному підході ймовірність події можна розрахувати ще до проведення випробувань. Важливо, що при цьому розглядають лише рівноможливі події, яких скінченне число.

Якщо події попарно несумісні, рівноможливі та їхня сума є достовірною подією, то їх називають **елементарними подіями** (чи **елементарними наслідками випробування**).

Інакше кажучи, *елементарними* є рівноможливі події, що утворюють повну групу.

Множину усіх елементарних подій позначають $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Ті елементарні наслідки, в яких настає подія, що цікавить нас, називають такими, що *сприяють* цій події.

Таким чином, подія A спостерігається, якщо у випробуванні настає один, байдуже який, з елементарних наслідків, що сприяють A.

Імовірністю події A називають відношення числа наслідків, що сприяють цій події, до загального числа усіх елементарних наслідків випробування. Позначають $P(A)$.

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad [2.2]$$

де m – число елементарних наслідків, що сприяють A;

n – число усіх можливих елементарних наслідків випробування.

2.3. Властивості ймовірності

Із визначення ймовірності випливають її властивості.

Властивість 1. Імовірність достовірної події дорівнює 1:

$P(\Omega) = 1$ (оскільки $m = n$).

Властивість 2. Імовірність неможливої події дорівнює 0:

$P(\varnothing) = 0$ (оскільки $m = 0$).

Властивість 3. Імовірність події набуває значень від 0 до 1:

$0 \le P(A) \le 1$ (оскільки $0 \le m \le n$).

Властивість 4. Імовірність протилежної події:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (оскільки $P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$).

Властивість 5. Імовірність суми подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1$ (оскільки для повної групи подій $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$).

Для розрахунку ймовірності за класичним визначенням (тобто кількості всіляких і сприятливих наслідків) у більшості випадків знадобляться формули комбінаторики (див. *додаток 3*).

Приклад 2.2. Чотиритомне зібрання творів розташували на полиці у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що томи опиняться у належному порядку.

Розв'язання.

Випробування: розставлення 4-х томів на полиці.

$n = P_4 = 4! = 24$ – кількість усіх елементарних наслідків випробування.

Подія A: 4 томи розставлено послідовно.

$m = 1$ – кількість елементарних наслідків, що сприяють появі події A.

Тоді за формулою (2.2) $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}$.

Відповідь: 1/24.

Приклад 2.3. Телефонний номер складається з семи цифр. Знайти ймовірність того, що усі цифри різні.

Розв'язання.

Випробування: складання семизначного телефонного номера.

$n = 9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 9\ 000\ 000$ — кількість усіх елементарних наслідків випробування (якщо першою цифрою не може бути 0, то для неї 9 варіантів. Інші цифри — будь-які від 0 до 9, тобто по 10 варіантів).

Подія A: усі цифри номера різні.

$m = 9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4 = 544\ 320$ — кількість елементарних наслідків, що сприяють появі події A (для першої цифри, відмінної від нуля, – 9 варіантів; для другої – 9 варіантів, включаючи і нуль, для кожної наступної – на один варіант менше).

Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{544320}{9000000}\approx0{,}06$.

Відповідь: $\approx$0,06.

Приклад 2.4. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі увійшли 4 людини. Припустимо, що кожна з них з рівною ймовірністю може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що усі четверо вийдуть на різних поверхах.

Розв'язання.

Випробування: розподіл 4 пасажирів по 8 поверхах.

Число всіляких наслідків дорівнює числу розміщень з 8 по 4 з повтореннями:

$n=8^4=4096$.

Подія A: пасажири вийшли на різних поверхах.

Число сприятливих наслідків дорівнює числу розміщень з 8 по 4:

$m=A_8^4=\frac{8!}{4!}=1680$.

Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1680}{4096}\approx0{,}41$.

Відповідь: $\approx$0,41.

Приклад 2.5. Серед 24 першокурсників – 6 полтавчан. Яка ймовірність того, що при випадковому формуванні групи студентів з 15 чоловік в ній виявиться лише 3 полтавчанина?

Розв'язання.

Випробування: відбір 15 студентів групи з 24.

$n = C_{24}^{15} = \frac{24!}{15!\cdot9!} = 1\ 307\ 504$.

Подія A: у групі – 3 полтавчанина, інші – не полтавчани.

Число сприятливих наслідків, коли в групі 3 полтавчанина (з 6 можливих) і інші 15–3=12 студентів групи – не полтавчани (з 24–6=18 можливих), дорівнює

$$m = C_6^3 \cdot C_{18}^{12} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{18!}{12!\cdot 6!} = 371\ 280.$$

Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{371\ 280}{1\ 307\ 504} \approx 0{,}284.$

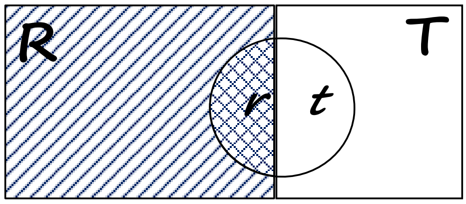
Відповідь: ≈0,284.

Узагальнення прикладу 2.5. У наявності є сукупність $R+T$ однорідних елементів. Із них R елементів мають деяку особливість, а T елементів – її не мають. Із цієї загальної сукупності вибирають випадковим чином $r+t$ елементів. Визначити ймовірність того, що серед вибраних елементів рівно r матимуть особливість.

Розв'язання.

Випробування: вибір $r+t$ елементів з $R+T$.

$$n = C_{R+T}^{r+t}$$



Подія: r елементів із вибраних мають особливість і t елементів, що залишилися, її не мають.

$$m = C_R^r \cdot C_T^t$$

Тоді
$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_R^r \cdot C_T^t}{C_{R+T}^{r+t}}} \qquad [2.3]$$

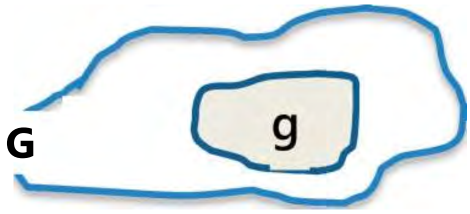
Недоліки класичного визначення ймовірності:

1) складність виявлення рівноможливих наслідків;
2) жорсткість вимог первинних умов;
3) розглядують лише скінченне число наслідків.

2.4. Геометрична ймовірність

Класичне визначення ймовірності не можна застосовувати до випробувань із нескінченним числом наслідків. Для опису таких ситуацій інколи можна запровадити поняття геометричної ймовірності – імовірність влучення точки у деяку область.

Під **геометричною ймовірністю** події A розуміють відношення міри (mes)[1] тієї області g, що сприяє появі події, до міри усієї області G можливих наслідків події A:



$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)},$$

де mes – міра області.

Якщо розглядають імовірність влучення точки на відрізок l, що становить частину відрізка L, то мірами будуть довжини відрізків:

$$P(A) = \frac{|l|}{|L|}.$$

У разі пласких фігур мірами можуть бути їх площі, для тривимірних фігур – їх об'єми і так далі:

$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)} \text{ або } P(A) = \frac{V(g)}{V(G)}.$$

Унаслідок рівноможливості ймовірність не залежить від форми областей, а лише від їх міри (площі, об'єму тощо).[2]

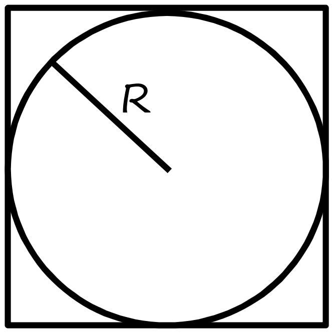
У загальному випадку ймовірність визначають аксіоматично (див. далі про аксіоматику Колмогорова). Можна перевірити, що усі вимоги цієї аксіоматики для геометричної ймовірності виконано.

Приклад 2.6. Яка ймовірність того, що кинутий в квадратний двір м'яч потрапить на круглу клумбу, що є вписаним в цей квадрат колом радіуса R?

Розв'язання.

Класичне визначення ймовірності непридатне (оскільки число елементарних подій нескінченне). Скористаємося геометричним визначенням.

Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі кола до площі квадрата:



$$P(A) = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}.$$

[1] від англ. *measure* – міра.

[2] *Зауваження. Про недоліки геометричного визначення ймовірності.* У разі класичного визначення ймовірність достовірної події дорівнює 1 (а неможливої – 0); справедливо і зворотне твердження. У разі ж геометричного визначення зворотні твердження не мають місця. З геометричної точки зору ймовірність влучення точки в деяку певну точку квадрата дорівнює 0, хоча подія може відбутися – тобто не є неможливою.

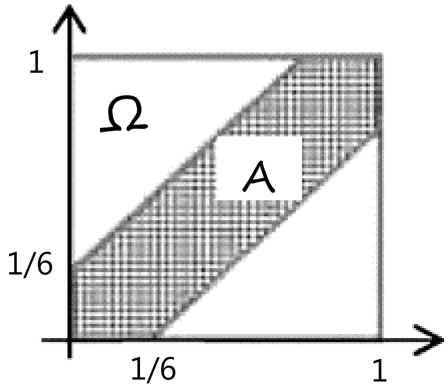
Приклад 2.7. Задача про зустріч. Два студенти умовилися зустрітися у визначеному місці. Той, що прийде першим, чекає на другого впродовж 10 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент наугад вибирає момент свого приходу в проміжку від 12 до 13 годин.

Розв'язання.

Класичне визначення ймовірності непридатне (оскільки число елементарних подій нескінченне). Скористаємося геометричним визначенням.

Вважатимемо інтервал з 12 до 13 годин дня відрізком [0; 1] завдовжки 1 годину.

Нехай x і y – відповідні моменти приходу студентів. Вони є точками відрізків [0; 1]. Відкладемо їх на осях координат Ox, Oy. Усі можливі наслідки – це множина точок квадрата зі стороною 1:



$\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$.

Випробування аналогічно киданню точок в квадрат і влученню в область

$A = \{(x,y): |x-y| \le 1/6\}$ (оскільки 10 хвилин – це 1/6 години).

Тоді ймовірність зустрічі дорівнює відношенню площ області A і квадрата Ω:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1-(5/6)^2}{1} = \frac{11}{36}.$$

2.5. Аксіоматичне визначення ймовірності

Узагальнення геометричного визначення ймовірності призводить до сучасного аксіоматичного її визначення. Загальноприйняте сьогодні аксіоматичне обґрунтування теорії ймовірностей було запропоноване видатним математиком А. М. Колмогоровим (1903–1987), щоб позбавитися недоліків, властивих іншим підходам.

З цією метою він висунув ідею постулювати поняття ймовірності та сформулював просту систему аксіом.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ – множина елементів, які називатимемо *елементарними подіями*. Це наслідки випадкового експерименту, з яких в експерименті відбувається рівно один.

Випадкові події – це будь-які підмножини з Ω. Позначимо через U таку сукупність випадкових подій, для якої $\Omega \in U$ і для усіх $A, B \in U$ виконується:

$A+B \in U,\quad A\backslash B \in U,\quad A \cdot B \in U$ (U – це алгебра подій).

Поставимо у відповідність кожній випадковій події A з алгебри подій U певне число $P(A)$ і назвемо його ймовірністю, якщо виконана низка умов.

Імовірністю $P(A)$ називають числову функцію подій, що задана на алгебрі подій і задовольняє аксіомам:

Аксіома 1. Імовірність набуває невід'ємних значень:

$$P(A) \geq 0.$$

Аксіома 2. Імовірність достовірної події Ω дорівнює 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксіома 3 (*аксіома додавання ймовірностей*, або *аксіома адитивності*). Якщо A і B – несумісні події, то ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з цих двох подій, дорівнює сумі їхніх імовірностей:

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B), \qquad \text{якщо } A \cdot B = \varnothing} \qquad [2.4]$$

$$(A, B \in U)$$

Система цих аксіом Колмогорова несуперечлива, але вона не є повною: у різних питаннях теорії ймовірностей розглядають й інші аксіоми.

В елементарній теорії ймовірностей мають справу лише зі скінченним числом подій. У загальній математичній теорії ймовірностей досліджують і нескінченне число випадкових подій[1] (наприклад, при «киданні» точки на площину). При цьому передбачається, що виконується ще одна аксіома – неперервності.

Аксіома 4 (*аксіома неперервності*). Для будь-якої спадної послідовності подій

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$, такої що $\bigcap_k A_k = \varnothing$, справедливо:

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 0.$$

Якщо число подій скінченне, то аксіома 4 випливає з перших трьох.

Доведення: ▲ Дійсно, нехай послідовність множин $A_1, A_2, \ldots$ скінченна і, наприклад, A_p – найменша з них. Тоді усі A_{p+j} співпадають з A_p і

$$A_p = A_{p+j} = \bigcap_k A_k = \varnothing,$$

$$\lim_{k\to\infty} P(A_k) = P(\varnothing) = 0.$$ ■

[1] Тоді аксіому додавання потрібно замінити розширеною аксіомою додавання: $P(A_1+\ldots+A_n+\ldots) = P(A_1)+\ldots+P(A_n)+\ldots$

Якщо прийнято аксіоматику Колмогорова, то тепер деяку величину можна назвати ймовірністю, лише якщо усі ці аксіоми виконано (тобто слід перевірити виконання кожної з них).

Класична, статистична і геометрична ймовірності – це окремі випадки аксіоматики Колмогорова.

Перевіримо, що класичне визначення задовольняє переліченим колмогоровським аксіомам.

▲ 1) $0 \le m \le n$. Розділимо на n, отримаємо: $0 \le \frac{m}{n} \le 1$, тобто $P(A)=\frac{m}{n} \ge 0$. Аксіома 1 виконана.

2) Число наслідків, що сприяють достовірній події, дорівнює 1:

$n_\Omega = n \Rightarrow P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$. Аксіома 2 виконана.

3) Якщо події A і B несумісні ($A \cdot B = \varnothing$), то не існує наслідків, сприятливих одночасно і A і B. Отже, $m_{A+B} = m_A + m_B$.

Тоді $P(A+B) = \dfrac{m_{A+B}}{n} = \dfrac{m_A + m_B}{n} = P(A)+P(B)$.

Аксіома 3 виконана. ■

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, \ldots A_n$ – попарно несумісні, то ймовірність появи однієї будь-якої з них дорівнює сумі їхніх імовірностей:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

(або $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$).

Наслідок 2. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \ldots A_n$, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$$

(або $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1$).

Таким чином, виконується 5-та властивість класичної ймовірності.

Наслідок 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A}) = 1.$$

Звідси: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Таким чином, виконується 4-та властивість класичної ймовірності.[1]

---

[1] Якщо ймовірність однієї з двох протилежних подій позначити через $P(A) = p$, а протилежної події $P(\bar{A}) = q$, тоді маємо $p + q = 1$ або $p = 1 - q$.

Наслідок 4. Імовірність будь-якої події менше або дорівнює 1:

$$P(A) \le 1$$

Таким чином, виконується 3-тя властивість класичної ймовірності.

Наслідок 5. Імовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Таким чином, виконується 2-га властивість класичної ймовірності.

Доведення наслідків:

Доведення наслідку 1.

▲ За аксіомою додавання

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P(A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \sum_{k=3}^{n} P(A_k) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$ ■

Доведення наслідку 2.

▲ Оскільки події утворюють повну групу, значить, їхня сума – достовірна подія:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega.$$

Тоді за наслідком 1: $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P(\Omega).$

Отже, за аксіомою 2, $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1.$ ■

Доведення наслідку 3.

▲ Протилежні події утворюють повну групу, а сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

Оскільки $A + \bar{A} = \Omega$, то за аксіомою додавання $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$. ■

Доведення наслідку 4.

▲ За наслідком 3: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, отже, $P(A) \le 1$. ■

Доведення наслідку 5.

▲ Оскільки $A = A + \varnothing$, то за аксіомою додавання $P(A) + P(\varnothing) = P(A)$. Отже, $P(\varnothing) = 0$. ■

Приклад 2.8. В екзаменаційному білеті 3 питання. Для складання іспиту потрібно відповісти правильно хоча б на два питання із трьох. Всього із 30 питань студент встиг вивчити лише 20. Яка ймовірність скласти іспит?

Розв'язання.

Випробування: відповідь на три питання екзаменаційного квитка.

Подія A: правильна відповідь хоча б на два питання.

Позначимо через B_1 подію «правильна відповідь саме на два питання», через B_2 – «правильна відповідь на усі три питання». Тоді $A = B_1+B_2$.

$$P(B_1)=\frac{C_{20}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^3}=\frac{20\cdot 19\cdot 10\cdot 6}{2\cdot 30\cdot 29\cdot 28}\approx 0{,}468,$$

$$P(B_2)=\frac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^0}{C_{30}^3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 6}{6\cdot 30\cdot 29\cdot 28}\approx 0{,}281.$$

Події B_1 і B_2 несумісні, тому $P(A)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)\approx 0{,}749$.

Відповідь: ≈0,749.

Приклад 2.9 (парадокс Р. Мізеса). Тенісист може поїхати на змагання або у Францію, або в Австралію. Змагання проходять в один і той же час. Імовірність для нього перемогти в першому турнірі – 0,6, в другому – 0,7. Питання: «Яка ймовірність, що він стане переможцем (хоча б в одному турнірі)»?

Студент дав таку відповідь: оскільки обидві події несумісні, то за аксіомою додавання ймовірність стати переможцем $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}6+0{,}7=1{,}3$. Отримана ймовірність більше одиниці. У чому помилка в міркуваннях?

Розв'язання.

Аксіома додавання ймовірностей вимагає, щоб обидві події належали одному і тому ж імовірнісному простору. Ця вимога не виконана.

Перевірте, чи засвоїли ви такі **ключові поняття:**

- ♣ імовірність
  - аксіоматична
  - геометрична
  - класична
  - статистична
- ♣ властивості ймовірності
- ♣ відносна частота
- ♣ додавання ймовірностей
- ♣ аксіоми Колмогорова
- ♣ аксіома адитивності (додавання ймовірностей)
- ♣ аксіома неперервності

Питання для самоконтролю

1. Які основні властивості ймовірності?
2. У яких випадках використовують класичне визначення ймовірності?

3. У яких випадках використовують геометричне визначення ймовірності?
4. При перевірці 80 пар кросівок виявлено 4 браковані пари. Яка відносна частота стандартних кросівок? *Відповідь*: 0,95.
5. Підкидають три монети. Які результати експерименту рівноможливі, які їхні ймовірності? *Відповідь*: 1/8.
6. На 12-кілометровій ділянці газопроводу між двома компресорними станціями стався витік газу, який однаково можливий у будь-якій точці цієї ділянки. Яка ймовірність, що витік не далі ніж в 1 км від першої станції? *Відповідь*: 1/12.
7. Випадкові події A, B, C попарно несумісні. Чому дорівнює ймовірність $A+B+C+\overline{B}$? *Відповідь*: 1.
8. Відомі ймовірності $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0,2$, $P(A\cdot\overline{B})=0,4$, $P(\overline{A}\cdot B)=0,1$. Чи сумісні події A і B? (*Вказівка*: знайти ймовірність $P(A\cdot B)$.)

Глава 3

Додавання і множення ймовірностей

Основні питання:

- ♣ *незалежність подій*
- ♣ *умовна ймовірність*
- ♣ *імовірність добутку подій*
- ♣ *імовірність суми сумісних подій*
- ♣ *повна ймовірність*
- ♣ *переоцінка постфактум імовірностей гіпотез*

3.1. Умовна ймовірність

Часто при обчисленні ймовірності подій доводиться враховувати деякі додаткові умови, окрім початкового комплексу умов експерименту. Наприклад, часто обчислюють імовірність події B за додаткової умови, що відбулася подія A.

Умовною ймовірністю називають імовірність події B, обчислену в припущенні, що подія A вже відбулася.

Позначають умовну ймовірність $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Будемо розглядати умовну ймовірність лише для таких подій A, імовірність настання яких відмінна від нуля: $P(A)\neq 0$.

Подію B називають **незалежною** від події A з $P(A)\neq 0$, якщо ймовірність події B не залежить від того, відбулася подія A чи ні.

Подію B називають **залежною** від події A, якщо ймовірність події B змінюється залежно від того, відбулася подія A чи ні.

Умова незалежності події B від події A може бути записана у вигляді:

$$\boxed{P(B/A) = P(B).} \qquad [3.1]$$

Декілька подій називають **незалежними у сукупності**, якщо ймовірність настання кожної з них не залежить від результатів будь-якого числа інших подій, що вже відбулися.

3.2. Теорема множення ймовірностей

У разі класичної ймовірності, якщо Ω – скінченномірний простір, то справедлива наступна теорема.[1]

Теорема (множення). Імовірність сумісного настання двох залежних подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)} \quad [3.2]$$

<u>Зауваження.</u> Немає значення, яку з подій A і B вважати першою, а яку другою, тобто виконується також і рівність:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)} \quad [3.3]$$

Доведення. ▲ Доведемо формулу (3.2). Позначимо число сприятливих результатів для події B через m_B, а для події A – m_A. Число випадків, сприятливих і події A, і події B одночасно (тому що ми не припускали A і B несумісними), дорівнює m_{AB}, а їхня ймовірність дорівнює

$$P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}.$$

Помножимо і розділимо цей вираз на m_A:

$$P(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{m_{AB}}{n} \cdot \frac{m_A}{m_A} = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{m_{AB}}{m_A}.$$

Зауважимо, що в останньому знаменнику m_A означає також і число усіх можливих випадків, тому що подія A вже відбулася. Із них лише m_{AB} сприятливі події B. Отже, $\frac{m_{AB}}{m_A} = P(B/A)$.

Тоді $P(AB) = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{m_{AB}}{m_A} = P(A) \cdot P(B/A)$. ■

Таким чином, для **обчислення умовної ймовірності** $P(B/A)$ події B за умови, що відбулася подія A із ненульовою ймовірністю $P(A) \neq 0$, використовують формулу:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0} \quad [3.4]$$

---

[1] У разі нескінченності Ω це твердження є постулатом.

Наслідок 1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A.

Доведення: ▲ За теоремою множення:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ і } P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Отже, $P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Підставимо в цю формулу $P(A) = P(A/B)$ (оскільки за умовою подія A не залежить від події B):

$$P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A).$$

Розділимо обидві частини на $P(A) \neq 0$:

$P(B/A) = P(B)$ (тобто B не залежить від A). ■

Наслідок 2. Якщо події A і B *незалежні*, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \qquad [3.5]$$

Доведення: ▲ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$. ■

Наслідок 3. Імовірність добутку *скінченного числа незалежних у сукупності* подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)} \qquad [3.6]$$

або
$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Доведення: ▲

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(A_1 \cdot \prod_{k=2}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \cdot \prod_{k=3}^{n} A_k) = \cdots =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$ ■

Наслідок 4. Імовірність добутку *скінченного числа залежних* подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність усіх інших, обчислених у припущенні, що усі попередні події вже відбулися:

$$\boxed{P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})} \qquad [3.7]$$

Приклад 3.1. У безпрограшну лотерею розігрують 20 квитків до кінотеатру і 5 квитків у театр. Із коробки по одному дістають два квитки. Яка ймовірність того, що першим буде витягнуто квиток у кінотеатр, а другим – у театр?
Розв'язання.
Випробування: почергове виймання двох квитків.
Подія A: 1-й квиток у кінотеатр.
Подія B: 2-й квиток у театр.
Подія B залежить від події A, тому шукана ймовірність за теоремою множення для залежних подій: $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A)$.
$P(A) = \frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, $P(B/A)=\frac{5}{24}$
(тому що після першого виймання залишилися 24 квитки, із них 5 у театр).
Тоді $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}$.
Відповідь: 1/6.

Приклад 3.2. Із літер розрізної азбуки *а, а, и, и, к, с, с, т, т, т* випадковим чином викладають слово. Яка ймовірність, що вийде слово «статистика»?
Розв'язання.
Випробування: викладання літер азбуки.
Подія A: слово «статистика».
За класичним визначенням: $p=\frac{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!}{10!}$.
З використанням наслідку 4 із теореми множення: $p=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$.
Відповідь: $p=\frac{48}{10!}\approx 0{,}0000132$.

Приклад 3.3. У великій рекламній агенції 24 % працівників отримують високу заробітну плату. 60 % працівників агенції – жінки, а 13,5 % працівників – жінки, які одержують високу заробітну плату. Чи можна стверджувати, що в агенції існує дискримінація жінок в оплаті праці?
Розв'язання.
Випробування: випадковий вибір працівника агенції.
Подія A: вибраний працівник з високою зарплатою. $P(A)=0{,}24$.
Подія B: вибраний працівник – жінка. $P(B)=0{,}6$.
За умовою, $P(AB)=0{,}135$.
Для розв'язання задачі порівняємо ймовірність $P(A)$ вибору високооплачуваного працівника (будь-якої статі) і ймовірність $P(A/B)$ вибору високооплачуваного працівника серед жінок.
Оскільки події A і B залежні, то $P(A\cdot B) = P(B)\cdot P(A/B)$.
А оскільки $P(B)\neq 0$, то $P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{0{,}135}{0{,}6}=0{,}225 < P(A)=0{,}24$.
Таким чином, $P(A/B) < P(A)$.
Відповідь: жінки в агенції мають менше шансів отримати високу зарплату.

3.3. Імовірність появи хоча б однієї події

Нехай унаслідок випробування може з'явитися хоча б одна (чи декілька) із n незалежних в сукупності подій, імовірність яких відома.

Теорема. Імовірність появи *хоча б однієї з незалежних у сукупності* подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) \qquad [3.8]$$

або $$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}).$$

Доведення. ▲ Нехай A – подія, що полягає в появі хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $A = A_1+A_2+\ldots+A_n$.

Сума ймовірностей протилежних подій A і $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$ (жодна з подій не відбулася) дорівнює одиниці:

$P(A) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = 1.$

Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}).$

За наслідком 3 із теореми множення:

$1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$

Отже, $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$ ■

[1] Те ж доведення в агрегованому запису:

▲ $\prod_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ – подія, протилежна події $\sum_{k=1}^{n} A_k$, що полягає у появі хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Тоді $\sum_{k=1}^{n} A_k + \prod_{k=1}^{n} \overline{A_k} = \Omega$ і, відтак, $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) + P\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1.$

Звідси випливає $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right).$

За наслідком 3 із теореми множення: $1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}).$

Отже, $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}).$ ■

[1] Так помічено додатковий теоретичний матеріал.

Якщо позначити ймовірність кожної з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ через $p_1, p_2, \ldots p_n$, а ймовірності протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ – через $q_1, q_2, \ldots q_n$, то формулу (3.8) можна записати коротше:

$$\boxed{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n} \qquad [3.9]$$

Зауваження. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мають однакову ймовірність p, то ймовірність появи хоча б однієї з них:

$P(A) = 1 - q^n$ (де $q = 1 - p$).

3.4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема. Імовірність суми двох *сумісних подій* дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи.

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)} \qquad [3.10]$$

Доведення: ▲ $A+B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$ (оскільки події A і B сумісні, то подія $A+B$ відбудеться, якщо станеться одна із несумісних подій: $A \cdot \overline{B}$, або $\overline{A} \cdot B$, або $A \cdot B$.

Для суми ймовірностей несумісних подій виконується:

$P(A+B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B)$.

Обчислимо два перші доданки. 1) Подія A станеться, якщо відбудеться одна з двох несумісних подій $A \cdot \overline{B}$ або $A \cdot B$:

$A = A \cdot \overline{B} + A \cdot B$.

Тоді для суми ймовірностей несумісних подій виконується:

$P(A) = P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B)$. Звідси: $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B)$. [3.11]

2) За аналогією:

Тоді $P(B) = P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B)$, звідки: $P(\overline{A} \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B)$. [3.12]

Підставимо обидва вирази (3.11) і (3.12) у вираз $P(A+B)$:

$$P(A+B) = P(A) - P(A \cdot B) + P(B) - P(A \cdot B) + P(A \cdot B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$ ■

Приклад 3.4. Імовірність того, що споживач побачить рекламу Вашої фірми по телебаченню, дорівнює 0,05, в Інтернеті – 0,08. Нехай обидві події незалежні; визначте ймовірність, що споживач побачить: а) обидві реклами; б) хоча б одну рекламу.
Розв'язання.
Випробування: просування реклами по ТБ і в Інтернеті.
Подія A: споживач побачив рекламу по ТБ.
Подія B: споживач побачив рекламу в Інтернеті.
а) Оскільки події A і B незалежні, то
$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}05\cdot 0{,}08 = 0{,}004$.
б) Оскільки події A і B сумісні, то
$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 0{,}05+0{,}08-0{,}004 = 0{,}126$.
Цю ймовірність можна знайти і за допомогою властивості ймовірностей протилежних подій: $P(A+B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$.
Оскільки $P(\bar{A}) = 1-P(A)=1-0{,}05=0{,}95$
і $P(\bar{B}) = 1-P(B)=1-0{,}08=0{,}92$,
то $P(A+B) = 1-0{,}95\cdot 0{,}92 = 1-0{,}874 = 0{,}126$.
Відповіді: а) 0,004; б) 0,126.

3.5. Формула повної ймовірності

Основні теореми додавання і множення ймовірностей дозволяють вивести формулу повної ймовірності.

Нехай подія A може відбутися лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають **гіпотезами** (оскільки заздалегідь невідомо, яка з них настане).

Теорема (формула повної ймовірності). Імовірність події A дорівнює сумі попарних добутків імовірностей гіпотез і відповідних умовних імовірностей події A:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n) \quad [3.13]$$

або

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)\cdot P(A/H_j).$$

Доведення: ▲ Оскільки $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу, то

$\Omega = H_1+H_2+ \ldots +H_n$

і $P(A) = P(\Omega\cdot A) = P((H_1+H_2+\ldots+H_n)\cdot A) =$

$= P(H_1\cdot A + H_2\cdot A + \ldots + H_n\cdot A)$.

Оскільки $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несумісні, то $H_j \cdot A$ також несумісні, і тоді

$$P(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A).$$

Застосуємо теорему множення до $H_j \cdot A$:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Таким чином, $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j).$$ ■

Приклад 3.5. За підсумками фінансового аналізу прогнозується зростання вартості акцій компанії наступного року: із імовірністю 0,83 – якщо зростатиме економіка країни, і з імовірністю 0,52 – у разі економічного спаду або стагнації. Імовірність економічного підйому в країні оцінюють на рівні 78 %. Оцініть імовірність зростання цін на акції компанії наступного року.

Розв'язання.

Випробування: прогноз котирувань акцій.

Подія A: зростання вартості акцій.

Гіпотеза H_1: економіка країни на підйомі.

Гіпотеза H_2: в країні економічний спад.

За умовами задачі: $P(H_1)=0,78$; $P(H_2)=1-0,78=0,22$.

А також: $P(A/H_1)=0,83$; $P(A/H_2)=0,52$.

За формулою повної ймовірності $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$.

Тоді $P(A) = 0,78 \cdot 0,83 + 0,22 \cdot 0,52 = 0,7618$.

Відповідь: 0,7618.

3.6. Формула Бейєса

Наслідком теореми множення і формули повної ймовірності є формула Бейєса[1].

Нехай подія A може відбутися лише водночас з однією із подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу. Імовірності цих гіпотез відомі до досвіду (*апріорні*[2] ймовірності) і дорівнюють $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$.

Нехай відомо, що подія A відбулася. Вона могла відбутися спільно лише з однією з гіпотез, але невідомо, з якою саме. Знайдемо ймовірності цих гіпотез за умови, що відбулася подія A, – тобто знайдемо умовні ймовірності $P(H_j/A)$, які називають *апостеріорними* («із досвіду»)[3].

---

[1] Thomas Bayes [beɪz] – англійський математик і пресвітеріанський священик (1702–1761).

[2] a priori *(лат.)* – перед досвідом.

[3] a posteriori *(лат.)* – після досвіду.

Для обчислення апостеріорної ймовірності скористаємось теоремою множення ймовірностей (3.2 і 3.3):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Покладемо у ній $B=H_j$ $(j=\overline{1, n})$:

$$P(A) \cdot P(H_j/A) = P(H_j) \cdot P(A/H_j).$$

Звідси:

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{P(A)}.$$

Це співвідношення і називають **формулою Бейєса**.

Формула Бейєса дозволяє *переоцінити* ймовірності гіпотез після того, як став відомим результат випробування, внаслідок якого з'явилася подія A. Ці апостеріорні ймовірності обчислюються за формулою Бейєса:

$$\boxed{P(H_j/A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{P(A)}} \quad (j=\overline{1, n}). \qquad [3.14]$$

Приклад 3.6. У продаж надійшли монітори, випущені на трьох заводах деякої компанії: 20 % з них виготовлено першим заводом, 30% – другим, 50 % – третім. Продукція першого заводу містить 5% прихованих дефектів, другого – 10 %, третього – 2,5 %. Куплений монітор виявився бракованим. Яка ймовірність, що він був виготовлений другим заводом?

Розв'язання.

Випробування: покупка монітора, виготовленого одним із заводів фірми.

Подія A: монітор виявився бракованим.

Гіпотеза H_1: монітор виготовлено 1-м заводом.

Гіпотеза H_2: монітор виготовлено 2-м заводом.

Гіпотеза H_3: монітор виготовлено 3-м заводом.

$P(H_1)=0{,}2$; $P(H_2)=0{,}3$; $P(H_3)=0{,}5$; $P(A/H_1)=0{,}05$; $P(A/H_2)=0{,}1$; $P(A/H_3)=0{,}025$.

Обчислимо повну ймовірність того, що монітор виявиться бракованим:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}05+0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}025=0{,}0525.$$

Імовірність випуску купленого бракованого монітора другим заводом:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}1}{0{,}0525}\approx 0{,}57.$$

Таким чином, ймовірність випуску цього монітора другим заводом до проведення перевірки дорівнює 0,3, а після неї – 0,57.

Формула Бейєса – одна з основних теорем елементарної теорії ймовірностей. Вона є моделлю раціонального вибору в умовах неповної або неточної інформації. За її допомогою можна точніше обчислити ймовірність події, узявши в розрахунок як раніше відому інформацію, так і дані нових спостережень.

<u>*Приклад 3.7.*</u> Перед розслідуванням причин невдалого запуску космічної ракети було висунено гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$. За даними статистики $P(H_1)=0{,}2$; $P(H_2)=0{,}4$; $P(H_3)=0{,}3$; $P(H_4)=0{,}1$. Під час розслідування виявлено, що при запуску стався витік пального (подія A). За тією ж статистикою умовні ймовірності події A: $P(A/H_1)=0{,}8$; $P(A/H_2)=0{,}1$; $P(A/H_3)=0{,}2$; $P(A/H_3)=0{,}3$. Яка гіпотеза найбільш імовірна?

<u>*Розв'язання*</u>.

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}3}=\frac{16}{29}$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}1}{0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}3}=\frac{4}{29}$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}3}=\frac{6}{29}$$

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}3}=\frac{3}{29}$$

Таким чином, найбільш імовірна гіпотеза H_1, $P(H_1)={}^{16}/_{29}\approx 0{,}552$.

<u>*Приклад 3.8 (так званий парадокс теореми Бейєса)*</u>. За даними ВООЗ, рівень захворюваності на туберкульоз – 94 випадки на 100 тисяч населення. За деякими оцінками, імовірність виявити туберкульоз при рентгенівському обстеженні хворого на туберкульоз дорівнює 0,95. Імовірність прийняти при цьому здорову людину за хвору дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що людина насправді здорова, якщо вона була визнана хворою при рентген-обстеженні?

<u>*Розв'язання*</u>.

Подія A: людина визнана хворою.

Гіпотеза H_1: людина здорова.

Гіпотеза H_2: людина хвора.

$P(H_2)=0{,}00094$, отже, $P(H_1)=0{,}99906$; $P(A/H_1)=0{,}01$; $P(A/H_2)=0{,}95$.

Повна ймовірність того, що людину визнають хворою, дорівнює 1,0884 %:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=0{,}99906\cdot 0{,}01+0{,}00094\cdot 0{,}95=0{,}010884.$$

Імовірність визнати хворою здорову людину:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}99906\cdot 0{,}01}{0{,}010884}=0{,}91795.$$

Таким чином, за даних умов ≈91,8 % людей, визнаних за підсумками обстеження хворими на туберкульоз, насправді здорові! Знання основ теорії ймовірностей повинне спонукати такого пацієнта пройти повторне обстеження.

Цей парадокс – наслідок значної відмінності між числом здорових і хворих. Наприклад, для мільйона чоловік 1 % помилки означає 9991 помилковий діагноз, а при цьому чутливість рентген-обстеження 95 % означає всього 893 правильні діагнози.

Формула Бейєса – одна з найбільш важливих в системах штучного інтелекту: вони засновані на бейєсівському підході. Він також широко використовується в системах ухвалення рішень, фінансовій і маркетинговій інформатиці, обчислювальній економіці, аналізі ризиків, медичній діагностиці, генетиці, розпізнаванні мови, обробці зображень, робототехніці, спам-фільтрах, корекції помилок в мережевих комунікаціях, класифікації документів тощо.

Перевірте, чи засвоїли ви такі **ключові поняття:**

♣ імовірність
- умовна
- добутку подій
- суми сумісних подій
- хоча б однієї події
- апріорна
- апостеріорна

♣ події
- залежні
- незалежні
- незалежні у сукупності

♣ формула
- повної ймовірності
- Бейєса

Питання для самоконтролю

1. Які події називають залежними, незалежними, незалежними у сукупності?
2. Як визначають і позначають умовну ймовірність?
3. Знайти ймовірності: а) $P(A/A)$; б) $P(A/B)$, якщо $A\subset B$? *Відповідь:* а) 1; б) 1.
4. Чим відрізняються формули додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій?
5. Розташуйте події в неспадаючому порядку їхніх ймовірностей: $\emptyset$, $A+B$, B, $B\backslash A$, U, $A\cdot B$. *Відповідь:* $\emptyset$, $A\cdot B$, $B\backslash A$, B, $A+B$, U.
6. Як обчислити ймовірність появи хоча би однієї події з повної групи подій?
7. Гральний кубик підкидають чотири рази. Яка ймовірність, що хоча би раз випаде шістка? *Відповідь:* 671/1296.
8. Чи є події A і B сумісними, якщо: а) $P(A)=0,6$, $P(B)=0,5$; б) $P(A)=0,6$, $P(B)=0,3$? *Відповідь:* а) так; б) невідомо.

9. Чи є незалежними події A і B, якщо: а) $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}5$, $P(AB)=0{,}3$; б) $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}5$, $P(A+B)=0{,}8$? *Відповідь*: а),б) так.
10. Знайти умовні ймовірності $P(A/B)$ і $P(B/A)$, якщо $P(AB)=0{,}28$, $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}8$? *Відповідь*: а) 0,4; б) 0,35.
11. Яким умовам повинна задовольняти подія, щоб її ймовірність можна було знайти за формулою повної ймовірності?
12. Чому дорівнює ймовірність $P(\sum_k B_k)$, якщо B_k – усі гіпотези в формулі повної ймовірності? *Відповідь*: 1.
13. У якому випадку використовують формулу Бейєса?
14. Незаплановані покупки деякого товару в магазині здійснюють в середньому 70 % жінок і 25 % чоловіків. При анкетуванні 10 жінок і 4 чоловіків, що купили сьогодні товар, вони вказували, чи планова була покупка. Яка ймовірність, що випадково вибрану анкету, де відмічено неплановість покупки, заповнювала жінка? *Відповідь*: 0,875.
15. Студент вивчив не усі питання до іспиту. У якому випадку більше ймовірність витягнути нещасливий квиток: коли студент тягне квиток першим або останнім? *Відповідь*: однаково.

Глава 4

Повторні випробування

Основні питання:

- ♣ *схема випробувань Бернуллі та ймовірність події в ній*
- ♣ *асимптотичні наближення:*
  імовірності подій при великому числі випробувань
- ♣ *імовірність малоймовірних подій*

4.1. Формула Бернуллі

Розглянемо ситуації, коли проводяться випробування, що багаторазово повторюються при деякому комплексі умов. У цих випадках становить інтерес імовірність числа настання деякої події A в серії випробувань.

Схема випробувань Бернуллі[1] – це послідовність n однакових випробувань, що задовольняють умовам:

1) кожне випробування має два наслідки: успіх (поява події, що позначають 1) і невдача (непоява події, позначають 0); вони взаємно несумісні і протилежні (випробування з *бінарними* результатами);
2) імовірність успіху p у кожному випробуванні стала. Імовірність невдачі $q=1-p$;
3) усі випробування незалежні.

Такого роду випробування здійснюються в практичній і науковій діяльності – при контролі якості (вибрані вироби кондиційні або браковані), епідеміологічних дослідженнях (чи інфіковані вірусом вибрані пацієнти), фінансовому аналізі (чи повернені кредити, чи закриті депозити) тощо.

Іноді схему уявляють як спостереження за n однотипними об'єктами, кожен з яких з однаковою ймовірністю p може мати або не мати деякої ознаки. Якщо i-й об'єкт ($i=1,\dots,n$) має ознаку – кажуть, що i-те випробування завершилося успіхом (тобто 1), інакше – невдачею (0). Таким чином одержують послідовність значень 1 і 0 з імовірністю p і $q=1-p$ відповідно.

[1] Загальна теорія експериментів з бінарним наслідком, що названа ім'ям Я. Бернуллі, була розроблена ним у XVII столітті.

Теорема. Імовірність того, що в серії з n випробувань за схемою Бернуллі подія A з'явиться точно k разів ($0 \le k \le n$), може бути обчислена за **формулою Бернуллі**:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \qquad [4.1]$$

▲ *Доведення*.

Розглянемо подію B: «подія A відбулася в n дослідах k разів».
Вона може відбутися різними способами, таких способів C_n^k (оскільки число сприятливих результатів можна розглядати як число всіляких виймань k предметів із n предметів, причому порядок не має значення).
Отже, можна записати подію B як суму несумісних подій $B_1, B_2, \dots B_{C_n^k}$:

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_{C_n^k}.$$

Події B_j попарно несумісні, відтак:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_{C_n^k}).$$

Кожна з B_j є добутком незалежних подій, із яких k сприяють A, а $n-k$ сприяють $\overline{A}$.
Оскільки ймовірність кожної із сприятливих подій дорівнює p, кожної з несприятливих подій дорівнює $q=1-p$ і випробування незалежні, то:

$$P(B_j) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Оскільки число таких незалежних подій B_j дорівнює C_n^k, то

$$P(B) = \underbrace{p^k \cdot q^{n-k} + \dots + p^k \cdot q^{n-k}}_{C_n^k \text{ разів}} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Таким чином, $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. ■

Задача знаходження[1] ймовірності появи події k разів у серії з n випробувань часто зустрічається в економічних та управлінських застосуваннях – наприклад, при контролі великих партій товару вимагається з'ясувати, скільки є браку, і т. ін.

[1] Існують комп'ютерні функції обчислення формули (4.1): наприклад, в MS Excel – БИНОМ.РАСП (*k* ; *n* ; *p* ; ЛОЖЬ), в Mathcad – dbinom (*k* ; *n* ; *Q*).

Легко бачити, що

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$ (за формулою бінома Ньютона)

$$(p+q=1)$$

З іншого боку, це сума ймовірностей усіх варіантів подій, тобто достовірної події, імовірність якої, зрозуміло, дорівнює 1.

Приклад 4.1. Кожен із шести кандидатів на вакантні посади має рівні шанси бути прийнятим (імовірність зайняти вакансії для кожного дорівнює 0,4). Знайти ймовірність того, що з шістьох на роботу будуть прийняті четверо.

Розв'язання.

$p=0{,}4; \quad n=6; \quad k=4; \quad q=1-p=0{,}6.$

Шукана ймовірність за формулою Бернуллі:

$P_6(4) = C_6^4 \cdot (0{,}4)^4 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}138.$

Приклад 4.2. Два рівні супротивники грають у шахи. Що ймовірніше – виграти 2 зустрічі з 4-х або 3 із 6?

Розв'язання.

$n=4, \ k=2, \ p=½$

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$, тобто більше ймовірність виграти дві гри з чотирьох.

Наслідок 1. Імовірність, що подія A відбудеться не більше ніж k_1 разів, дорівнює

$$P_n\left(k \le k_1\right) = \sum_{k=0}^{k_1} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Наслідок 2. Імовірність, що подія A відбудеться більше ніж k_2 разів, дорівнює

$$P_n\left(k > k_2\right) = \sum_{k=k_2}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Наслідок 3. Імовірність, що подія A відбудеться не менше ніж k_1 і не більше ніж k_2 разів, дорівнює

$$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

При фіксованих p і n імовірності $P_n(k)$ залежать від k. Загальний графічний вигляд цієї залежності представлено на діаграмі (рис. 4.1).

Добре видно, що існує таке значення k_0, при якому ймовірність досягає свого максимуму.

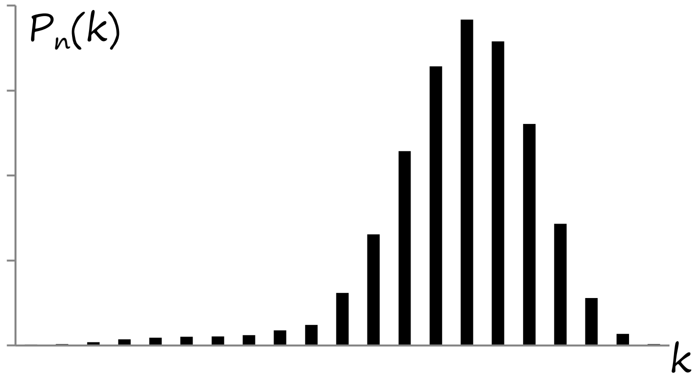


Рис. 4.1. Імовірності у схемі випробувань Бернуллі

Найімовірнішим числом появи події в n незалежних випробуваннях називають число k_0, що задовольняє умові $P_n(k_0) \geq P_n(k)$ для усіх $k=\overline{0,n}$, що не дорівнюють k_0.

Твердження. Найімовірніше число k_0 появи події A в серії із n незалежних випробувань задовольняє нерівності

$$\boxed{np - q \leq k_0 \leq np + p} \quad [4.2]$$

Якщо $np - q$ не є цілим числом, то значення k_0 – єдине. Якщо $np - q$ і, отже, $np + p$ – цілі числа, то найімовірніших значень два: $k_1 = np - q$; $k_2 = np + p$.

Приклад 4.3. За статистикою через два роки експлуатації сьома частка рейсових автобусів і третина маршрутних таксі потребують капітального ремонту. Автопарк закупив 17 нових автобусів і 11 маршруток, які експлуатуватимуться в однакових умовах. Яке найімовірніше число автобусів і маршруток через два роки потребуватиме кап. ремонту?

Розв'язання.

Імовірність кап. ремонту автобуса: $p=1/7$.

Тоді $q=1-1/7=6/7$.

Підставимо дані у нерівність $np-q\leq k_0\leq np+p$:

$17\cdot{}^{1}/_{7}-{}^{6}/_{7} \leq k \leq 17\cdot{}^{1}/_{7}+{}^{1}/_{7}$

або $1{,}571 \leq k \leq 2{,}571$.

Оскільки k – ціле число, то шукане найімовірніше число $k=2$.

За аналогією, імовірність кап. ремонту маршрутки: $p=1/3$; $q=1-1/3=2/3$.
$11\cdot{}^1/_3-{}^2/_3 \le k \le 11\cdot{}^1/_3+{}^1/_3$, тобто $3 \le k \le 4$.
Таким чином, є два найімовірніші значення: $k_1=3$ і $k_2=4$.
Відповідь: 2 автобуси; 3 або 4 маршрутні таксі.

4.2. Асимптотичні наближення

При великих значеннях n (наприклад, $n>50$) і k обчислення за формулою Бернуллі стає громіздким. Тому застосовують асимптотичні формули, що дають наближені розрахунки ймовірностей.

4.2.1. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Теорема (локальна Муавра – Лапласа). Якщо в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія A відбувається з однією і тією ж сталою ймовірністю p, відмінною від 0 і 1, то ймовірність появи події A точно k разів для великих значень n приблизно дорівнює[1]:

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}},} \qquad [4.3]$$

де $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ – обмежена величина, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса,

$p\neq 0$, $q\neq 0$, $n\to\infty$.

Значення функції Гаусса $\varphi(x)$ протабульовано і зведено в таблицю для невід'ємних значень x (див. додаток 7.2). Оскільки ця функція парна, то для від'ємних значень x: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для $|x|\ge 4$ вважають $\varphi(x)=0$.

Точність формули (4.3) зростає як зі зростанням значень n і k, так і з наближенням значення p до 0,5 (тобто коли $p\approx q$).

Приклад 4.4. Аналіз попиту на чоловіче взуття показав, що 28 % покупців потрібно взуття 43-го розміру. Щомісячно магазин продає в середньому 260 пар чоловічого взуття. З'ясуйте для менеджера, який формує замовлення на постачання товару, найімовірніше число покупців чоловічого взуття 43 розміру і відповідну ймовірність.
Розв'язання.
$n=260$; $p=0{,}28$; $q=0{,}72$.

[1] Формулу зазвичай застосовують при $n>100$ і $npq>20$.

Найімовірніше число k знайдемо з $np-q \le k \le np+p$:
$260\cdot 0{,}28-0{,}28 \le k \le 260\cdot 0{,}28+0{,}72$
$72{,}52 \le k \le 73{,}52$
$k=73$ – найімовірніше число покупців.

За локальною теоремою Муавра – Лапласа $P_n(k)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, де $x=\frac{k-np}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$.

Підставимо початкові дані: $x=\frac{73-260\cdot 0{,}28}{\sqrt{260\cdot 0{,}28\cdot 0{,}72}}\approx\frac{0{,}2}{7{,}24}\approx 0{,}0276$.

Знайдемо функцію Гаусса (за допомогою комп'ютера чи таблиць): $\varphi(x)\approx 0{,}3989$.

Тоді $P_{260}(73)\approx\frac{0{,}3989}{\sqrt{260\cdot 0{,}28\cdot 0{,}72}}\approx 0{,}05$.

Відповідь: Найімовірніше число покупок 73; імовірність 0,05.

4.2.2. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Теорема. Якщо в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія A відбувається з однією і тією ж сталою ймовірністю p, відмінною від 0 і 1, то ймовірність того, що подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів, для великих значень n приблизно дорівнює:

$$\boxed{P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),} \qquad [4.4]$$

де $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $p\neq 0$, $q\neq 0$, $n\to\infty$,

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – **функція Лапласа** (або **інтеграл імовірностей**).

Оскільки інтеграл $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ не можна виразити через елементарні функції, то значення функції Лапласа протабульовано і зведено в таблицю – для невід'ємних значень x (див. додаток 7.3).

Враховуючи, що функція непарна, для від'ємних значень x: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Для $x\ge 4$ з великою точністю вважають $\Phi(x)\approx 0{,}5$.

Крім того, у комп'ютерних програмах для статистичних розрахунків є відповідні вбудовані функції[1].

Точність формули (4.4) зростає зі зростанням n.

[1] Наприклад (див. додаток 5), у MS Excel можна використовувати функцію ГАУСС(x) або формулу НОРМ.СТ.РАСП (x ; ИСТИНА) – 0,5, у Mathcad – формулу *cnorm* (x) – 0,5.

Приклад 4.5. Доля проблемних кредитів банку складає 10 %. Знайти ймовірність того, що у випадковій вибірці зі 150 кредитів проблемними будуть від 10 до 60.
Розв'язання.
Подія A: наявність проблем по виплаті одного кредитного договору.
$p=0,1$; $q=1-p=0,9$; $n = 150$; $k_1=10$; $k_2=60$.
Оскільки n досить велике (>100), скористаємося інтегральною теоремою Лапласа.
$x_1=\dfrac{10-150\cdot0,1}{\sqrt{150\cdot0,1\cdot0,9}}=-1,36$; $x_2=\dfrac{60-150\cdot0,1}{\sqrt{150\cdot0,1\cdot0,9}}=12,26$.
Знайдемо значення функції Лапласа $\Phi(x)$ (з таблиці чи за допомогою комп'ютерних функцій):
$\Phi(x_1) = \Phi(-1,36) = -\Phi(1,36) = -0,4131$.
$\Phi(x_2) = \Phi(12,26) = 0,5$.
Тоді $P_{150}(10\le k\le 60)\approx\Phi(12,26)-\Phi(-1,36)=0,5-(-0,4131)=0,9131$.
Відповідь: Імовірність дорівнює 0,9131.

4.2.3. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Якщо ймовірність p настання події в окремому випробуванні близька до нуля, то навіть при великому числі випробувань n, але при невеликій величині добутку np, значення ймовірностей $P_n(k)$, отримані з локальної теореми Лапласа, виявляються недостатньо точними, і виникає потреба в іншій наближеній формулі для таких випадків.

Пуассон[1] запропонував розглянути випадок, коли $n\to\infty$, а $p\to0$, але так, що $\lim\limits_{n\to\infty} pn = \lambda>0$ $\left(\text{де } p=\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Цього припущення достатньо, щоб із формули Бернуллі отримати іншу формулу, яка виявилася придатною для вирішення багатьох задач.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні стала і мала, число незалежних випробувань n достатньо велике, але значення добутку $np = \lambda$ залишається невеликим[2], то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться k разів, приблизно дорівнює:

формула Пуассона:
$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad [4.5]$$

[1] С. Д. Пуассон (1781–1840) – видатний французький математик, механік і фізик.
[2] Зазвичай наближену формулу Пуассона застосовують замість формули Бернуллі при $p<0,1$ і $npq<10$.

Доведення. ▲ Перетворимо формулу Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, підставивши до неї вираз $p=\frac{\lambda}{n}$:

$$P_n(k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{k!\,n^k}\cdot\lambda^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n}{\underbrace{n\cdot n\ldots n}_{k\text{ разів}}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

розділимо другий дріб почленно (у його чисельнику і знаменнику по k співмножників), а останній співмножник формули перетворимо з урахуванням того, що $z^{\alpha\beta}=(z^{\alpha})^{\beta}$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\searrow\,0}\underbrace{\left(1-\frac{k-2}{n}\right)}_{\searrow\,0}\ldots\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\searrow\,0}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\searrow\,0}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

позначимо $\frac{-\lambda}{n}=\alpha$; врахуємо, що при $n\to\infty$, $\alpha\to 0$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (2-га чудова границя)

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Таким чином, $C_n^k p^k q^{n-k}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. ■

Це і є формула Пуассона (див. її значення[1] у додатку 7.1):

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Із розкладання функції e^x у ряд в околі нуля випливає, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_n(k)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

<u>*Приклад 4.6.*</u> В офісному центрі незалежно один від одного включено 120 ламп (світильників). Імовірність того, що одна лампа перегорить впродовж року, дорівнює 0,08. Яка ймовірність, що впродовж року перегорять 10 ламп?

[1] Для розрахунків формули Пуассона (4.5) існують онлайн-калькулятори і комп'ютерні функції (див. додаток 5): наприклад, у MS Excel – ПУАССОН.РАСП (*k*; λ; ЛОЖЬ), у Mathcad – dpois (*k*; λ).

<u>*Розв'язання.*</u>
Подія A: перегоряння однієї лампи впродовж року.
$P(A)=p=0,08$.
Необхідну ймовірність обчислюємо за формулою Пуассона, оскільки число $n=120$ велике, а ймовірність p мала.
$n=120$; $p=0,08$; $k=10$; $\lambda=np = 120\cdot 0,08=9,6$.
$P_{120}(10)=\frac{9,6^{10}}{10!}e^{-9,6}\approx 0,1241$.
Відповідь: Імовірність ≈0,1241.

<u>*Приклад 4.7.*</u> У наявності є *N* лотерейних білетів, серед яких *M* виграшних. Скільки потрібно купити білетів, щоб імовірність виграшу була не менше ніж значення p_0?
<u>*Розв'язання.*</u>
Позначимо число куплених білетів через n. Розумно припустити, що ймовірність виграшу за одним квитком $p=\frac{M}{N}$ дуже мала.
Тоді за формулою Пуассона ймовірність того, що жоден квиток не виграє:
$P_n(0) = e^{-\lambda}$, де $\lambda = pn = \frac{M}{N}n$.
Отже, імовірність хоча б одного виграшу дорівнює
$P_n(k\geq 1) = 1-P_n(0) = 1-e^{-\lambda} \geq p_0$.
Звідси $e^{-\lambda} \leq 1-p_0$, а відтак, $-\lambda \leq \ln(1-p_0)$.
Тоді $\lambda \geq -\ln\left(1-p_0\right) = \ln\frac{1}{1-p_0}$.
Таким чином, $\frac{M}{N}n \geq \ln\frac{1}{1-p_0}$, і відтак, $n \geq \frac{N}{M}\ln\frac{1}{1-p_0}$.
Відповідь: слід купити не менше ніж $\frac{N}{M}\ln\frac{1}{1-p_0}$ білетів.

<u>*Приклад 4.8.*</u> Поява комп'ютерів привела до того, що можна розраховувати значення за точною формулою Бернуллі й для великих значень n, не застосовуючи наближені формули Муавра – Лапласа або Пуассона.
Обчислимо ймовірність настання трьох подій в 10 000 випробуваннях з імовірністю кожного 0,0002 за формулою Бернуллі і порівняємо з формулою Пуассона, обчисливши їх на комп'ютері або онлайн-калькуляторах.
<u>*Розв'язання.*</u>
За формулою Бернуллі:
$P_{10000}(3)= C_{10000}^{3} \cdot 0,0002^{3} \cdot 0,9998^{9997} \approx 0,1804650914262$
(або використовуючи функцію MS Excel БИНОМ.РАСП(3; 10000; 0,0002; ЛОЖЬ)).
За формулою Пуассона с $\lambda=0,0002\cdot 10000=2$:
$P_{10000}(3)\approx\frac{2^{3}}{3!}e^{-2} \approx 0,18045704431548$
(або використовуючи функцію MS Excel ПУАССОН.РАСП(3; 2; ЛОЖЬ)).
Обидві формули дали однакові результати з точністю тільки до 4-х знаків.

Перевірте, чи засвоїли ви такі
ключові поняття:

- ♣ схема випробувань Бернуллі
- ♣ найімовірніше число подій
- ♣ формула Бернуллі
- ♣ формула Пуассона
- ♣ функція Гаусса
- ♣ локальна теорема Муавра – Лапласа
- ♣ інтегральна теорема Муавра – Лапласа
- ♣ інтеграл імовірностей
- ♣ функція Лапласа

Питання для самоконтролю

1. Яким умовам повинні задовольняти випробування у схемі Бернуллі?
2. Чи є випробуваннями за схемою Бернуллі: а) послідовні постріли в мішень п'яти стрільців (по одному пострілу кожен); б) послідовне витягання (по одному) п'яти куль із кошика з декількома різноколірними кулями; в) послідовне витягання (по одному) куль із кошика з декількома різноколірними кулями до появи синьої кулі. Відповіді обґрунтуйте.

   Відповідь: а) ні (події з різною ймовірністю);
   б) ні (залежні випробування);
   в) ні (випадкове число випробувань).
3. Яка ймовірність того, що у випробуваннях за схемою Бернуллі подія станеться: а) 1 раз; б) k разів; в) менше ніж k разів; г) більше ніж k разів; ґ) не менше ніж k разів; е) не більше ніж k разів?
4. При спробі завести скутер він заводиться з імовірністю 0,8. Яка ймовірність: а) що він заведеться з другої спроби? б) що його доведеться заводити не більше двох разів? *Відповідь:* а) 0,16; б) 0,96.
5. Штраф за безквитковий проїзд у Німеччині складає 60 євро, місячний проїзний у столиці коштує 100 євро, а одноразовий квиток 2,80 євро. Вважаючи, що ймовірність штрафу за один безквитковий проїзд дорівнює 5%, порівняти вартість сплаченого проїзду 60 поїздок у місяць з найбільш імовірною величиною штрафів. *Відповідь:* $100<180$, $168<180$.
6. Чим відрізняється локальна і інтегральна теореми Муавра – Лапласа?
7. Які умови застосування теореми Пуассона?
8. У районному центрі 1000 автомобілістів. Для кожного з них імовірність втрати водійського посвідчення впродовж місяця в середньому 0,002. Яка ймовірність, що за місяць буде загублено 5 посвідчень? *Відповідь:* $\approx 0{,}036$.

Стр. 53 – 212 не відображаються при попередньому перегляді